Université de Strasbourg

TD1

Mébarek Alouani

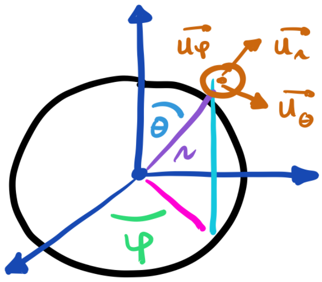
Transcrit par

Pierre Guichard

L3 Semestre 6 2021

Exercice 1 : Sphères uniformément chargées

1. On considère une sphère uniformément chargée : de quelles variables dépend le champs électrique calculé en un point M de l'espace ? Quelle est sa direction ?



Pour une sphère, le système de coordonnées adéquat est le système de coordonnées sphériques (r, θ, φ).
On remarque alors qu'il y a une invariance par rotation θ et une par rotation φ. De plus, tout les plan passant par le centre de la sphère sont des plans de symétries, ainsi on sait que le champ électrique $\vec{E}$:

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$$

2. Calculer en un point M de l'espace le champ électromagnétique généré par une sphère uniformément chargée en *volume* (densité volumique de charge ρ).

On utilise le théorème de Gauss :

$$\oiint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Et on sait que le volume d'une sphère de rayon R est

$$V_{\text{sphère}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

On doit décomposé notre calcul en deux parts :

$r > R$ Dans cette situation,

$$Q_{\text{int}} = \sigma V = \sigma \frac{4}{3}\pi R^3$$

Alors :

$$\begin{aligned}\frac{4\pi\sigma R^3}{3\epsilon_0} &= \oiint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ &= \oiint E \cdot r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \\ &= 4\pi r^2 E\end{aligned}$$

Alors

$$\boxed{\vec{E}_{r>R} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r}$$

$r < R$ Avec la même méthodologie on trouve :

$$\boxed{\vec{E}_{r<R} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\vec{u}_r}$$

3. Calculer en un point M de l'espace le champ électromagnétique généré par une sphère uniformément chargée en *surface* (densité surfacique de charge σ).

   Comme précédemment on fait deux cas :

   $r > R$

$$4\pi R^2 \frac{\sigma}{\epsilon_0} = 4\pi r^2 E(r)$$

   Alors,

$$\boxed{\vec{E}_{r>R} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} r^2 \vec{u}_r}$$

   $r < R$ dans cette situation, $E(r) = 0$ par le théorème de Gauss.

4. En déduire le potentiel électromagnétique dans chacun des cas précédents.

   On sait que :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

   Et qu'il y a continuité du potentiel :

$$V_{r<R}(R) = V_{r>R}(R) \qquad\qquad V(r \to \infty) = 0$$

   - Sphère chargée en volume Puisque $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$,

$$E = -\frac{\partial V}{\partial r} \Longleftarrow V = \mathrm{d}V = E\mathrm{d}r$$

   $r > R$

$$\int_{V(r)}^{V(\infty)} \mathrm{d}V = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0}\int_r^{+\infty} \frac{1}{r^2}\mathrm{d}r$$
$$0 - V(r) = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0}\left(0 + \frac{1}{r}\right)$$

Alors :

$$\boxed{V_{r>R} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}}$$

$r < R$

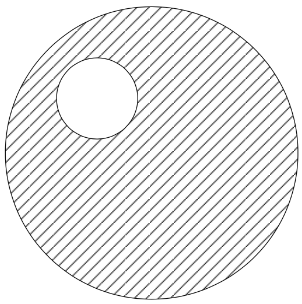
$$\int_{V(r)}^{V(R)} \mathrm{d}V = -\frac{\rho}{3\epsilon_0}\int_r^R r\mathrm{d}r$$
$$V(R) - V_{r<R}(r) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right)$$

On remarque que le $V(R) = V_{r>R}(R)$ et ainsi on trouve :

$$\boxed{V_{r<R} = \frac{\rho}{6\epsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right)}$$

- Sphère chargée en surface

5. On considère une sphère uniformément chargée en volume sauf dans une partie sphérique de celle-ci (*cf* figure ci-dessous). En vous appuyant sur les résultats précédents, donner brièvement l'expression du champ.



En fait la situation est équivalente à avoir deux sphères, la grande sphère (sphère 1) chargée en volume $+\rho$ et l'autre, la petite (sphère 2), chargée $-\rho$. Ainsi :

$$\vec{E}_{1_{r<R}} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\overrightarrow{\mathrm{O_1M}}$$

$$\vec{E}_{2_{r<R}} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0}\overrightarrow{\mathrm{O_2M}}$$

Et par le théorème de superposition on peut écrire :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2\\ &= \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\overrightarrow{\mathrm{O_1M}} - \overrightarrow{\mathrm{MO_2}}\right)\end{aligned}$$

Alors

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\overrightarrow{\mathrm{O_1O_2}}}$$

Exercice 2 : Plan infini et anneau

1. On considère un plan infini porteur d'une densité de charge surfacique uniforme σ.
   (a) Étudier les symétries et les invariances pour en déduire la direction du champs électrique et préciser les variables dont il dépend.

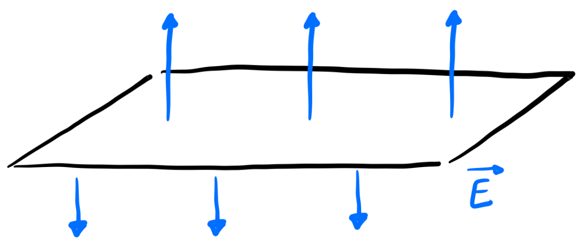
   On se place dans le système de coordonnées cylindre ou cartésiennes. Il y a invariance par translation dans le plan ainsi le champ ne dépend que de z. De plus, le plan est un plan de symétrie, en effet :

   $$\vec{E}(z) = -\vec{E}(-z)$$

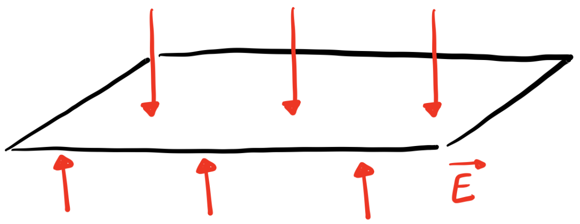
   Le champ est alors dirigé selon $\vec{u}_z$.

   (b) Quel est le sens du champ selon que $\sigma > 0$ ou $\sigma < 0$?

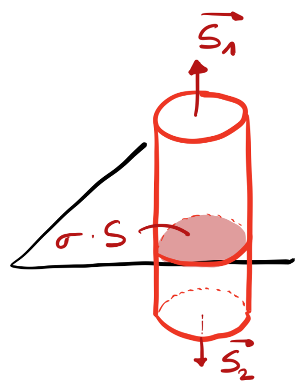
   Si $\sigma > 0$:



   Si $\sigma < 0$:



   (c) En utilisant le théorème de Gauss, calculer l'intensité du champ électrique.



$$
\begin{aligned}
\frac{\sigma S}{\epsilon_0} &= \vec{E}\cdot\vec{S}_1 + \vec{E}(-z)\vec{S}_2 \\
&= \vec{E}\cdot\vec{S}_1 - \vec{E}(-z)\vec{S}_1 \\
&= \vec{E}\cdot\vec{S}_1 + \vec{E}(z)\vec{S}_1 \\
&= 2\vec{E}S
\end{aligned}
$$

Alors :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z}$$

(d) En déduire l'expression du potentiel.

On sait que

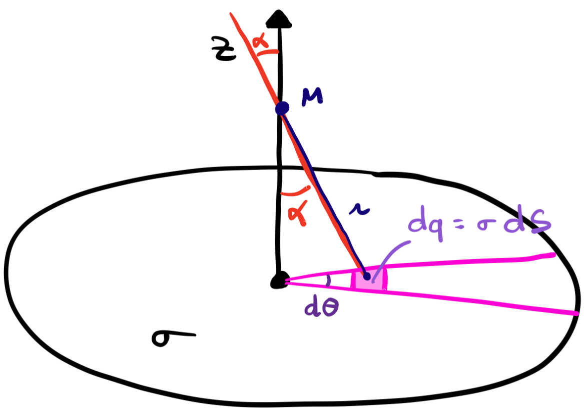
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

Alors

$$V(z) = -\int E\mathrm{d}z = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}z + \text{cst}$$

2. On considère un anneau circulaire de rayon R_{min} et R_{max}, de centre O et posé dans le plan (O, x, y). Il est porteur d'une densité de charge surfacique uniforme σ. On cherche le champ électrique engendré par l'anneau en un point de l'axe (O, z).

(a) Étudier les invariances et les symétries du problème pour en déduire la direction et les degrés de liberté du champ électrique.



On se placera dans le système de coordonnées cylindriques (ρ, θ, z), on remarque qu'il y a invariance du champ par translation dans le plan, alors $\vec{E} = \vec{E}(r)$. Et pour les mêmes arguments que précédemment, il est selon $\vec{u}_z$.

(b) Calculer l'intensité du champ par intégration des contributions infinitésimales de charges dq de l'anneau.

$$\mathrm{d}E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\cos\alpha$$

Par relation trigonométrique on trouve :

$$\cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

Alors :

$$E_z = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{R}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$$

d'où

$$\boxed{E_z = \vec{E}\cdot\vec{u}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)}$$

> **Remarque :** l'intégrale à calculé ici est de la forme :
>
> $$\int u'u^{3/2} = \frac{1}{-3/2+1}u^{-3/2+1} = -2u^{-1/2}$$

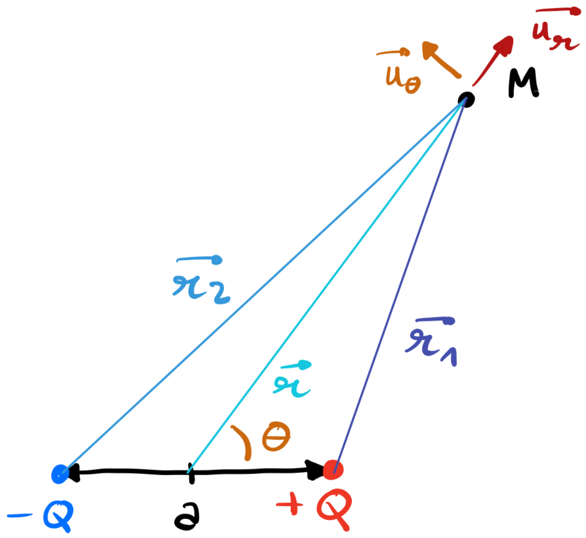
(c) En déduire le champ généré par un disque de rayon R. Retrouver les résultats du plan infini.

Pour retrouver le plan infini on fait rendre R vers $+\infty$ et on retrouve bien le même résultat que précédemment pour le plan.

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z$$

Exercice 3 : Développement multipolaire

1. *Dipôle électrostatique* : un dipôle électrostatique est constitué de deux charges Q et $-Q$ séparées d'une distance a.
   (a) Calculer le potentiel du dipôle à grande distance de celui-ci.



On suppose que la distance d'observation r est bien supérieur à la distance entre les charges a, c'est à dire que $r \gg a$.
Alors, par définition du principe de superposition :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)$$

Avec :

$$\vec{r}_1 = \vec{r} - \frac{\vec{a}}{2} \qquad \vec{r}_2 = \vec{r} + \frac{\vec{a}}{2}$$

Alors :

$$||\vec{r}_1||^2 = r_1^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - ar\cos\theta \qquad ||\vec{r}_2||^2 = r_2^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + ar\cos\theta$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{||\vec{r}_1||^2} &= \left(r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - a\cos\theta\right)^{-1/2} && r^2 \gg a^2 \\
&= \left(r^2 - ar\cos\theta\right)^{-1/2} \\
&= \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta\right)^{-1/2} && (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x \qquad x \gg 1 \\
&= \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta\right)
\end{aligned}$$

Alors :

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta\right) \qquad\qquad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta\right)$$

Alors,

$$\begin{aligned} V &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta - 1 + \frac{a}{2r}\cos\theta\right) \\ &= \frac{aq\cos\theta}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2} \\ &= \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{aligned}$$

Alors

$$\boxed{V = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}}$$

(b) En déduire son champ.

On sait que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\begin{cases} E_r = \dfrac{2aq\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{-aq\sin\theta r}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right) = \dfrac{p\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{cases}$$

Alors,

$$\boxed{\vec{E}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}}$$

2. *Développement multipolaire* : on considère le dipôle défini dans la question précédente. Calculer le potentiel quadripolaire de ce système en cherchant la contribution évoluant en $1/r^3$. Commenter.

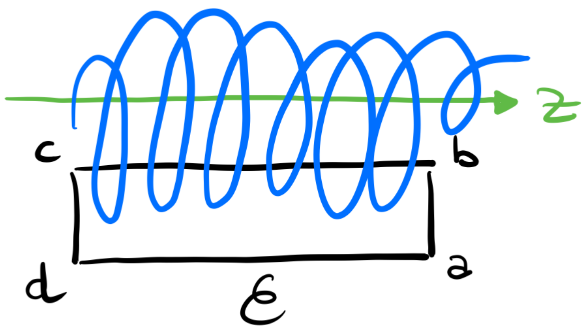
Exercice 4 : Solénoide

A l'aide du théorème d'Ampère, calculer le champ magnétique à l'intérieur d'un solénoide infini. Pour cela, on s'appuiera tout d'abord sur une étude des invariances et des symétries du problème.

On connaît le théorème d'Ampère,

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

où I est le courant total à travers la surface.



où $\mathcal{S} = a \to b + b \to c + c \to d + d \to a$,

A l'extérieur,

$$\vec{B} = \vec{0}$$

car $I = 0$ (ce qui rentre, sort)

A l'intérieur,
Il y a invariance par rotation θ, alors B est uniforme constant et orienté selon $\vec{u}_z$ car le plan $\mathcal{P} = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie de la distribution de charge donc $\vec{B} \perp \mathcal{P}$, alors $\vec{B}(M)$ est parallèle à $\vec{u}_z$.

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \underbrace{B \times L}_{=0 \text{ car extérieur}} + 0 + B \times L + 0 = \mu_0 N I$$

où N caractérise le nombre de spires.

Alors,

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{L} \vec{u}_z = \mu_0 n I \vec{u}_z}$$

Exercice 5 : Spire de courant et dipôle magnétique

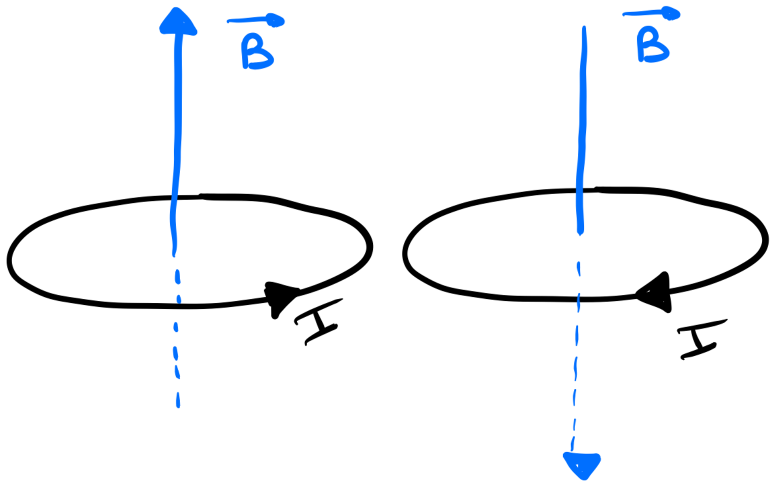
Une spire circulaire, de centre O, de rayon a, posée à plat dans le plan (O, x, y) est parcourue par un courant électrique d'intensité I.

1. On cherche à déterminer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ en un point M de l'axe (O, z).
   (a) Étudier les symétries et les invariances du champ magnétique afin de déterminer sa direction et les degrés de liberté dont il dépend.

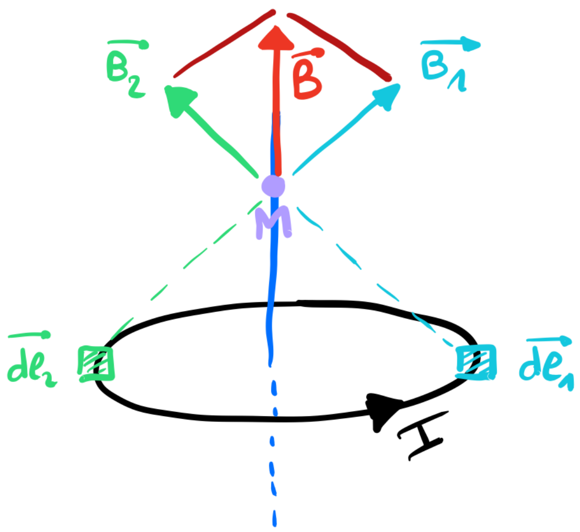
   Le champ magnétique est invariant par rotation θ autour de l'axe z, et nous somme sous une spire de rayon constant, alors $r = R$. Ainsi la seule dépendance du champ magnétique est par z : $\vec{B} = \vec{B}(z)$.

   Il y a deux plans d'antisymétries : $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ et $(O, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

   (b) Selon que le courant électrique I circule dans le sens des aiguilles d'une montre ou non, quelle est le sens du champ magnétique sur l'axe ?



(c) Faire un schéma en coupe de la contribution infinitésimale de deux éléments de la boucle de courant $\mathrm{d}\vec{l}$ située l'une de l'autre par l'axe (O, z). Déterminer les projections utiles intervenant dans le calcul du champ.



D'après le schéma on remarque que les contributions selon $\vec{u}_r$ se compensent alors seul la contribution selon $\vec{u}_z$ est utile.
On peut ainsi écrire le champ magnétique $\vec{B}$ uniquement selon le vecteur $\vec{u}_z$, c'est à dire :

$$\vec{B} = B(z)\vec{u}_z$$

(d) Intégrer et exprimer le champ magnétique $\vec{B}(M)$.

On connaît la loi de Biot-Savart :

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\mathrm{d}\vec{l} \wedge \overrightarrow{\mathrm{PM}}}{\mathrm{PM}^3}$$

Et on connaît $\mathrm{d}\vec{l}$ et $\overrightarrow{\mathrm{PM}}$:

$$\mathrm{d}\vec{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ R\mathrm{d}\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\mathrm{PM}} = \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{\mathrm{PM}^3} \begin{pmatrix} Rz\mathrm{d}\theta \\ 0 \\ R^2\mathrm{d}\theta \end{pmatrix}$$

On souhaite que le champ soit uniquement selon $\vec{u}_z$ alors :

$$\begin{aligned}\vec{B} = B\vec{u}_z &= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\left[\frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]^3 \mathrm{d}\theta\vec{u}_z \\ &= \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha\vec{u}_z\end{aligned}$$

où $\sin\alpha = R^2 + z^2$.

(e) Tracer la fonction $B(z)$.

2. On cherche à déterminer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ en un point *proche* de l'axe (O, z).
   (a) Considérer un cylindre élémentaire de hauteur dz et de rayon r et d'axe (O, z). A l'aide de l'expression du flux du champ magnétique sur cette surface, déterminer l'expression de la composante radiale B_r du champ en fonction de celle suivant l'axe (O, z) : B_z.
   (b) Calculer l'expression de la partie radiale du champ B_r.
3. *Dipôle magnétique* : on définit le moment magnétique de la spire par :

$$\vec{\mathcal{M}} = I\pi a^2 \hat{u}_z \tag{1}$$

On cherche à déterminer le champ magnétique crée par une spire en un point M situé à grande distance de celle-ci. On appelle θ l'angle entre l'axe de la spire (O, z) et l'axe (O, M). Montrer que ce champ est donné par :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0\mathcal{M}\cos(\theta)}{2\pi r^3}\hat{u}_r + \frac{\mu_0\mathcal{M}\sin(\theta)}{4\pi r^3}\hat{u}_\theta \tag{2}$$

Exercice 6 : Tube de courant

Calculer le champ magnétique interne et externe pour un fil de cuivre infini de forme cylindrique (de rayon a) et parcouru par une densité de courant uniforme $\vec{j}$.

Le plan $\mathcal{P} = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ constitue un plan de symétrie de la distribution de charge, donc $\vec{B} \perp \mathcal{P}$ et ainsi :

$$\vec{B} \parallel \vec{u}_\theta$$

Théorème d'Ampère :

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

avec $\vec{B} \parallel \vec{u}_\theta$ et la surface d'Ampère qui est le cercle de rayon r, $\mathrm{d}\vec{l} = r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\vec{u}_z$,

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} &= \oint_{\mathcal{S}} Br\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} B(r)\mathrm{d}\theta = \mu_0 I\end{aligned}$$

$\vec{B} = \vec{B}(r)$ car nous avons invariance par rotation θ et translation selon l'axe O_z, alors $B(r)$.

$$B(r)r2\pi = \mu_0 I$$

$I = jS = j \times \pi r^2$,

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 jr}{2}$$

D'où,

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 jr}{2}\vec{u}_\theta}$$