



UNIVERSITY OF STRASBOURG

Exam — Session 2

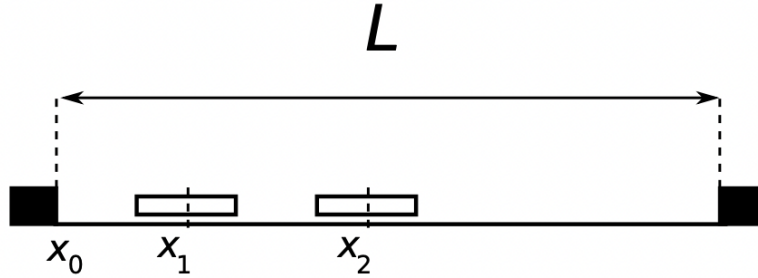
T. Charitat, J. Farago, G. Weick

Transcribed by
PIERRE GUICHARD

M1-S1 2015-2016

1 — Fluide classique de bâtonnets durs (gaz de Tonks)

On considère un modèle de fluide classique à une dimension, composé de N bâtonnets de longueur l et de masse m , confinés dans un espace de taille L à la température T . On appelle ρ la densité de bâtonnets. Les bâtonnets interagissent par un potentiel à deux corps $V(x)$. On se limite par la suite à une interaction de cœur dur. On note x_i la position du i -ème bâtonnet (voir figure ci-dessous). Dans toute la suite du problème, on se place dans l'ensemble canonique.



(a) Justifiez très soigneusement l'expression suivante pour la fonction de partition canonique :

$$Z(T, L, N) = \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{N/2} I_N(L),$$

avec l'intégrale

$$I_N(L) = \int_{l/2}^{L-(N-1)l-l/2} dx_1 \cdots \int_{x_{i-1}+l}^{L-(N-i)l-l/2} dx_i \cdots \int_{x_{N-1}+l}^{L-l/2} dx_N. \quad (1.1)$$

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} du \exp(-u^2) = \pi^{1/2}$.

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + V(x_i)$$

Le potentiel de paire intermoléculaire :

$$\Phi_{12}(x_i, x_j) = \begin{cases} 0 & |x_i - x_j| > l \\ \infty & |x_i - x_j| < l \end{cases}$$

où x_k est la position du centre du k -ème bâtonnet. Alors,

$$V_0(x_i) = \begin{cases} 0 & l/2 < x_i < L - (N-i)l - l/2 \\ \infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{1}{h^N} \int_v dx_1 \cdots \int_v dx_N \cdots \int dp_1 \cdots \int dp_N e^{-\beta \mathcal{H}} \\
&= \frac{1}{h^N} \int_v dx_1 \cdots \int_v dx_N e^{-\beta \sum_i V(x_i)} \cdots \int dp_1 \cdots \int dp_N e^{-\beta \sum_i \frac{p_i^2}{2m}} \\
&= \frac{1}{h^N} \int_v dx_1 \cdots \int_v dx_N e^{-\beta \sum_i V(x_i)} \left(\int dp_1 e^{-\beta \frac{p_1^2}{2m}} \right)^N & P_1 = \sqrt{\beta/2m} p_1 \\
&= \frac{1}{h^N} \int_v dx_1 \cdots \int_v dx_N e^{-\beta \sum_i V(x_i)} \left(\frac{2m}{\beta} \right)^{N/2} \left(\int dP_1 e^{-P_1^2} \right)^N \\
&= \frac{1}{h^N} \int_v dx_1 \cdots \int_v dx_N e^{-\beta \sum_i V(x_i)} \left(\frac{2m\pi}{\beta} \right)^{N/2} \\
&= \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{N/2} \int_v dx_1 \cdots \int_v dx_N e^{-\beta \sum_i V(x_i)} \\
&= \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{N/2} \int_{l/2}^{L-(N-1)l-l/2} dx_1 \cdots \int_{x_{i-1}+l}^{L-(N-i)l-l/2} dx_i \cdots \int_{x_{N-1}+l}^{L-l/2} dx_N
\end{aligned}$$

Il n'y pas le facteur $1/N!$ car ici les bâtonnets sont *discernables*.

(b) Effectuez le changement de variable

$$y_i = x_i + (N - i)l + \frac{l}{2} \quad (i = 1, \dots, N)$$

dans l'intégrale (1.1). Calculez l'intégrale $I_N(L)$. En déduire la fonction de partition du gaz de bâtonnets.

$$\begin{aligned}
y_i = x_i + (N - i)l + \frac{l}{2} &\implies dy_i = dx_i \\
I_N(L) &= \int_{l/2}^{L-(N-1)l-l/2} dx_1 \cdots \int_{x_{i-1}+l}^{L-(N-i)l-l/2} dx_i \cdots \int_{x_{N-1}+l}^{L-l/2} dx_N \\
&= \int_{Nl}^L dy_1 \cdots \int_{Nl}^L dy_i \cdots \int_{Nl}^L dy_N \\
&= \left(\int_{Nl}^L dy_1 \right)^N \\
&= (L - Nl)^N
\end{aligned}$$

Alors,

$$Z = \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{N/2} (L - Nl)^N$$

- (c) Déterminez à partir des résultats précédents l'équation d'état du système. Existe-t-il une transition de phase dans ce modèle ?

On peut ainsi calculer l'énergie libre,

$$\begin{aligned}
 F &= -k_B T \ln Z \\
 &= -k_B T \ln \left\{ \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} (L - Nl)^2 \right)^{N/2} \right\} \\
 &= -\frac{N k_B T}{2} \ln \left\{ \frac{2\pi m k_B T}{h^2} (L - Nl)^2 \right\} \\
 &= -\frac{N k_B T}{2} \ln \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right) - N k_B T \ln(L - Nl)
 \end{aligned}$$

Et on connaît l'expression de la pression,

$$\begin{aligned}
 p &= - \left(\frac{\partial F}{\partial L} \right)_{N,T} \\
 &= \frac{N k_B T}{L - Nl} \\
 &= \frac{k_B T}{\rho - l}
 \end{aligned}$$

Il n'y a pas de transition de phase dans ce modèle : Un changement d'état se traduit par l'existence d'une pression constante sur un intervalle non nul de valeurs, ce qui n'est pas le cas ici.

- (d) On rappelle le développement du viriel

$$\beta P = \sum_{i=1}^{+\infty} B_i(T) \rho^i,$$

où $\beta = 1/k_B T$, où P est la pression du système, et où

$$B_2(T) = \frac{1}{2} \int dx [1 - e^{-\beta V(x)}]$$

Calculez le second coefficient du viriel $B_2(T)$ de deux manières différentes et vérifiez la cohérence de vos résultats.

$$\begin{aligned}
B_2(T) &= \frac{1}{2} \int dx [1 - e^{-\beta V(x)}] \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{x_{i-1}+l} dx_i + \int_{L-(N-i)l-l/2}^L dx_i \cdots \right\} \quad \text{on intègre sur le complémentaire} \\
&\equiv \frac{1}{2} \left\{ \int_0^L dx_i - \int_{x_{i-1}+l}^{L-(N-i)l-l/2} dx_i \cdots \right\} \\
&= \frac{1}{2} \{L^N - I_N(L)\} \\
&= \frac{1}{2} \{L^N - (L - Nl)^N\} \\
&= \frac{L^N}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{L - Nl}{L} \right)^N \right\} \\
&= \frac{L^N}{2} \{1 - (1 - \rho l)^N\} \\
&= \frac{L^N}{2} \{1 - (1 - \eta)^N\}
\end{aligned}$$

où η correspond à la fraction du volume occupé par les bâtonnets.

- (e) Définissez et calculez le coefficient de compressibilité isotherme κ_T du fluide. Commentez votre résultat.

$$\kappa_T = -\frac{1}{L} \left(\frac{\partial L}{\partial p} \right)_T$$

$$p = \frac{Nk_B T}{L - Nl} \iff L = \frac{Nk_B T}{p} + Nl$$

$$\kappa_T = \frac{1}{L} \frac{Nk_B T}{p^2} \equiv \rho \frac{k_B T}{p^2}$$

La compressibilité varie linéairement en fonction de la densité. Plus la pression augmente, plus la compressibilité diminue, en $1/p^2$.

2 — Modèle de Blume-Emery-Griffiths

L'hélium-4 (${}^4\text{He}$) pur passe d'une phase fluide à une phase superfluide à basse température (transition λ). Lorsque l'on ajoute des atomes d'hélium-3, la transition est modifiée. On cherche à décrire un tel mélange ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$. Pour cela on utilise le modèle sur réseau de Blume, Emery et Griffiths. Chacun des N sites du réseau est occupé par un atome (soit d'hélium-4, soit d'hélium-3) et possède z proches voisins. On associe à chaque site un spin S_i . Lorsque le site est occupé par un atome de ${}^3\text{He}$, on attribue la valeur 0 au spin S_i , et la valeur ± 1 si c'est un atome de ${}^4\text{He}$. Le degré de liberté de spin décrit la nature du système : si $m = \langle S_i \rangle$ est nul, le fluide est normal et si $m \neq 0$ il est superfluide.

Afin de décrire ce système, on introduit tout d'abord un hamiltonien d'Ising $\mathcal{H}_{\text{Ising}}$ avec champ extérieur H et un couplage entre proches voisins $-J$ qui décrit la tendance du système à être superfluide à basse température,

$$\mathcal{H}_{\text{Ising}} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - H \sum_{i=1}^N S_i,$$

où $\langle i, j \rangle$ représente une somme sur les proches voisins du réseau. On décrit ensuite les interactions entre les proches voisins par un hamiltonien d'interaction

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = -u_{33} \sum_{\langle i,j \rangle} (1 - S_i^2)(1 - S_j^2) - u_{44} \sum_{\langle i,j \rangle} S_i^2 S_j^2 - u_{34} \sum_{\langle i,j \rangle} [(1 - S_i^2)S_j^2 + S_i^2(1 - S_j^2)],$$

où $-u_{33}$, $-u_{44}$ et $-u_{34} = -u_{43}$ représentent l'énergie d'interaction de chaque type de paire (${}^3\text{He}$ - ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$ - ${}^4\text{He}$, ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$ et ${}^4\text{He}$ - ${}^3\text{He}$, respectivement). Finalement, on prend en compte les potentiels chimiques μ_3 et μ_4 des deux espèces (${}^3\text{He}$ et ${}^4\text{He}$). Le hamiltonien total s'écrit donc

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{Ising}} + \mathcal{H}_{\text{int}} - \mu_3 N_3 - \mu_4 N_4, \quad (2.1)$$

où N_3 et N_4 sont les nombres d'atomes de ${}^3\text{He}$ et ${}^4\text{He}$.

2.1 — Hamiltonien du modèle

Montrez que le hamiltonien (2.1) se met sous la forme

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - K \sum_{\langle i,j \rangle} S_i^2 S_j^2 - H \sum_{i=1}^N S_i - \Delta \sum_{i=1}^N S_i^2 + C.$$

On exprimera les constantes K , Δ et C en fonction des paramètres du problème. Dans la suite on pose $C = 0$. Justifiez brièvement ce choix.

$$N_3 = \sum_{i=1}^N (1 - S_i^2) \qquad N_4 = \sum_{i=1}^N S_i^2$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \mathcal{H}_{\text{Ising}} - u_{33} \sum_{\langle i,j \rangle} (1 - S_i^2)(1 - S_j^2) - u_{44} \sum_{\langle i,j \rangle} S_i^2 S_j^2 - u_{34} \sum_{\langle i,j \rangle} [(1 - S_i^2)S_j^2 + S_i^2(1 - S_j^2)] - \mu_3 N_3 - \mu_4 N_4 \\
&= \mathcal{H}_{\text{Ising}} - u_{33} \sum_{\langle i,j \rangle} (1 - S_i^2)(1 - S_j^2) - u_{44} \sum_{\langle i,j \rangle} S_i^2 S_j^2 - 2u_{34} \sum_{\langle i,j \rangle} [(1 - S_i^2)S_j^2] - \mu_3 \sum_{i=1}^N (1 - S_i^2) - \mu_4 \sum_{i=1}^N S_i^2
\end{aligned}$$

On sait que,

$$\sum_{\langle i,j \rangle} S_i^2 = \frac{z}{2} \sum_{i=1}^N S_i^2 \qquad \sum_{\langle i,j \rangle} 1 = \frac{Nz}{2}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \mathcal{H}_{\text{Ising}} - u_{33} \sum_{\langle i,j \rangle} (1 - S_i^2)(1 - S_j^2) - u_{44} \sum_{\langle i,j \rangle} S_i^2 S_j^2 - 2u_{34} \sum_{\langle i,j \rangle} [(1 - S_i^2)S_j^2] - \mu_3 \sum_{i=1}^N (1 - S_i^2) - \mu_4 \sum_{i=1}^N S_i^2 \\
&= \mathcal{H}_{\text{Ising}} - \underbrace{[u_{44} + u_{33} - 2u_{34}]}_{\equiv K} \sum_{\langle i,j \rangle} S_i^2 S_j^2 - \underbrace{[z(u_{34} - u_{33}) + \mu_4 - \mu_3]}_{\equiv \Delta} \sum_{i=1}^N S_i^2 - \underbrace{\left(\frac{Nz}{2} u_{33} + \mu_3 N \right)}_{\equiv C}
\end{aligned}$$

C est juste une constante, elle définit le 0 d'énergie, on peut alors la mettre à 0 sans changer la physique du problème.

2.2 — Approximation de champ moyen

- (a) Exprimez la relation entre $\langle S_i^2 \rangle$ et la fraction moyenne x de ^3He par site.

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\langle N_3 \rangle}{N} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^N (1 - \langle S_i^2 \rangle)}{N} \\
&= \frac{N - \langle S_i^2 \rangle \sum_{i=1}^N 1}{N} \\
&= 1 - \langle S_i^2 \rangle
\end{aligned}$$

- (b) Définir la fonction de corrélation de spins C_{ij} . Que vaut-elle dans l'approximation de champ moyen ?

$$C_{ij} = \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle$$

Dans l'approximation de champ moyen, $C_{ij} = 0$.

- (c) Montrez que dans cette approximation on peut remplacer le produit $S_i S_j$ par $S_i m + m S_j - m^2$. Par quoi doit-on remplacer $S_i^2 S_j^2$?

$$\begin{aligned}
 S_i S_j &= (m + \delta S_i)(m + \delta S_j) \\
 &= m^2 + m(\delta S_i + \delta S_j) + \delta S_i \delta S_j \\
 &= m^2 + m(S_i - m + S_j - m) + \delta S_i \delta S_j \\
 &= m(S_i + S_j) - m^2 + \delta S_i \delta S_j
 \end{aligned}$$

Dans cette approximation, $+\delta S_i \delta S_j \approx 0$, d'où,

$$S_i S_j = m(S_i + S_j) - m^2$$

$$\begin{aligned}
 S_i^2 S_j^2 &= (m + \delta S_i)^2 (m + \delta S_j)^2 \\
 &=
 \end{aligned}$$

- (d) En déduire l'expression de la grande fonction de partition Ξ puis du grand potentiel Ω .

$$\begin{aligned}
 \Xi &= \sum_k e^{-\beta \mathcal{H}} \\
 &= \sum_{S_1=-1}^{+1} \cdots \sum_{S_N=-1}^{+1} e^{-\frac{\beta N z}{2} [Jm^2 + K(1-x)^2]} \prod_{i=1}^N e^{\beta [H + zJm] S_i + \beta [\Delta + zK(1-x)] S_i^2} \\
 &= e^{-\frac{\beta N z}{2} [Jm^2 + K(1-x)^2]} \times \left\{ 1 + 2e^{\beta(\Delta + zK(1-x))} \cosh(\beta(H + zJm)) \right\}^N
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Omega &= -k_B T \ln \Xi \\
 &= \frac{Nz}{2} [Jm^2 + K(1-x)^2] - Nk_B T \ln [1 + 2e^{\beta(\Delta + zK(1-x))} \cosh(\beta(H + zJm))]
 \end{aligned}$$

- (e) Écrire les relations d'auto-cohérences qui donnent m et x . Montrez qu'elles se mettent sous la forme

$$\begin{aligned}
 m &= (1-x) \tanh(\beta[H + zJm]), \\
 x &= \frac{1}{1 + 2 \cosh(\beta[H + zJm]) \exp(\beta[\Delta + zK(1-x)])},
 \end{aligned}$$

où $\beta = 1/k_B T$.

$$m = \langle S_i \rangle$$

$$\left\langle \sum_{i=1}^N S_i \right\rangle = Nm = \sum_l \left(\sum_i S_i \right) \frac{e^{-\beta \mathcal{H}}}{\Xi} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln \Xi}{\partial H} = -\frac{\partial \Omega}{\partial H}$$

C'est-à-dire,

$$m = -\frac{1}{N} \frac{\partial \Omega}{\partial H}$$

$$x = 1 - \langle S_i^2 \rangle$$

$$\left\langle \sum_{i=1}^N S_i^2 \right\rangle = N \langle S_i^2 \rangle = N(1 - x) = \sum_l \left(\sum_i S_i^2 \right) \frac{e^{-\beta \mathcal{H}}}{\Xi} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \Delta} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \Delta}$$

Et donc,

$$x = 1 + \frac{1}{N} \frac{\partial \Omega}{\partial \Delta}$$

Remarque : Il y a aussi une dépendance en H dans m et x ; mais on sait que le véritable état d'équilibre pour m et x est à un minima d'énergie, ce qui veut dire,

$$\frac{\partial \Omega(H, m(H), x(H))}{\partial H} = \frac{\partial \Omega(H, m(H), x(H))}{\partial H} + \underbrace{\frac{\partial \Omega}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial H} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial H}}_{=0}$$

Ainsi, en utilisant les formule trouvée pour m et x on obtient,

$$\begin{cases} m = \frac{2 \exp(\beta[\Delta + zK(1-x)]) \sinh(\beta[H + zJm])}{1 + 2 \exp(\beta[\Delta + zK(1-x)]) \cosh(\beta[H + zJm])} \\ x = \frac{1}{1 + 2 \exp(\beta[\Delta + zK(1-x)]) \cosh(\beta[H + zJm])} \end{cases}$$

2.3 — Description de la transition de phase par la théorie de Landau

On se place désormais dans le cas où $K = 0$ (justifiez brièvement ce choix). On se place à champ nul ($H = 0$) et près de la transition, c'est-à-dire à m voisin de 0.

(a) On introduit le potentiel

$$G(T, m, \Delta) = \Omega(T, \Delta, H) + Hm$$

Justifiez l'utilisation de ce potentiel pour étudier la transition de phase à champ nul.

$$\Omega(H) = \frac{NzJm^2}{2} - Nk_B T \ln(1 + 2e^{\beta\Delta} \cosh(\beta[H - zKm]))$$

Mais m est une fonction de H ,

On doit effectuer une transformation de Legendre,

$$G(m) = \Omega(H) + Hm$$

C'est-à-dire,

$$\frac{\partial G}{\partial m} = H$$

Pour $H = 0$, m est un minimum de G , ce qui peut motiver une expansion de $G(m)$.

(b) On cherche à développer ce potentiel sous la forme

$$G(T, m, \Delta) = G(T, 0, \Delta) + \frac{1}{2}a(T, \Delta)m^2 + \frac{1}{4}b(T, \Delta)m^4 + \frac{1}{6}c(T, \Delta)m^6 + \mathcal{O}(m^8).$$

En vous limitant au deuxième ordre en m , montrez que

$$a(T, \Delta) = \delta k_B T - zJ,$$

où l'on a posé $\delta = 1 + e^{-\beta\Delta}/2$. Dans la suite, on admettra que

$$b(T, \Delta) = \frac{k_B T}{8} \left(\delta^2 - \frac{\delta^3}{3} \right), c(T, \Delta) = \frac{k_B T}{6} \left(\frac{\delta^3}{2} - \frac{3\delta^4}{8} + \frac{3\delta^5}{40} \right)$$

$$\frac{\partial G(m)}{\partial m} = am \longrightarrow H$$

On peut relier ces quantités à l'aide de l'équation d'autocohérence,

$$m = \frac{2e^{\beta\Delta} \sinh(\beta[H + zJm])}{1 + 2e^{\beta\Delta} \cosh(\beta[H + zJm])}$$

Alors,

$$\begin{aligned} m &\approx \frac{2e^{\beta\Delta}\beta[H + zJm]}{1 + 2e^{\beta\Delta}} \\ &= \frac{\beta[H + zJm]}{1 + \frac{e^{-\beta\Delta}}{2}} \end{aligned}$$

Ce qu'on peut écrire,

$$\frac{\delta}{\beta}m = H + zJm$$

$$(k_B T \delta - zJ)m = H \equiv am$$

On obtient alors,

$$a = (k_B T \delta - zJ)$$

Ce qui est le premier coefficient de Landau.

- (c) Donnez qualitativement l'allure de $G(T, m, \Delta)$ lorsque $b(T, \Delta) > 0$. En déduire qu'il existe une transition de phase pour une température $T_c(x) = T_c(0)(1 - x)$.

On suppose $c > 0$,

$$G(m) = G(0) + \frac{am^2}{2} + \frac{bm^4}{4} + \frac{cm^6}{6} + \mathcal{O}(m^8)$$

On sait que

$$b \propto 1 - \frac{\delta}{3}$$

Ce qui veut dire que b peut-être positif ou négatif. Meaning it can be either positive or negative. From (??),

$$x = \frac{1}{1 + 2e^{\beta\Delta} \cosh(\beta[H + zJm])} \simeq \frac{1}{1 + 2e^{\beta\Delta}}$$

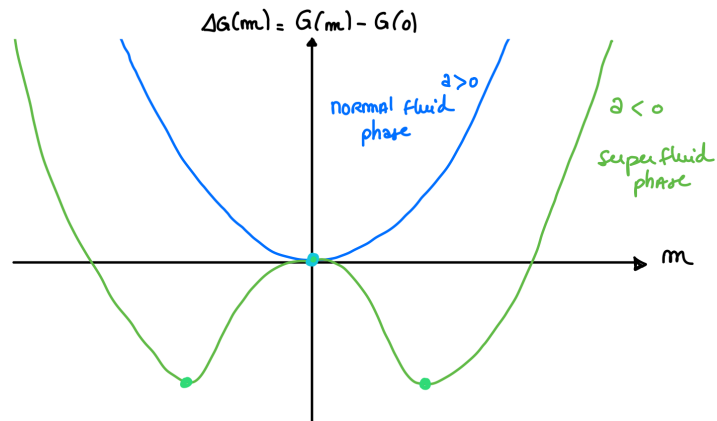
Alors,

$$1 - x = \frac{2e^{\beta\Delta}}{1 + 2e^{\beta\Delta}} = \frac{1}{\delta} \iff \delta = \frac{1}{1 - x}$$

Ainsi, c'est une mesure de la fraction de ^3He .

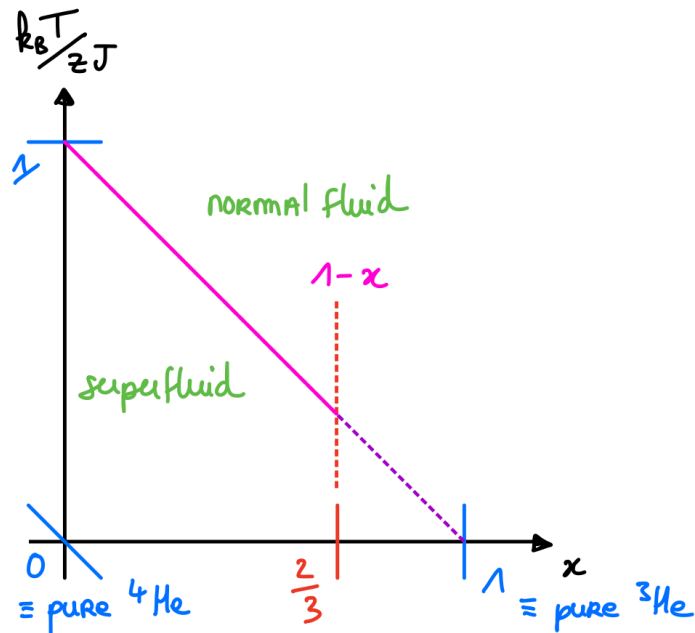
- Si on suppose $b > 0$, ça veut dire que $\delta < 3$,

$$\frac{1}{1 - x} < 3 \longrightarrow x < \frac{2}{3}$$

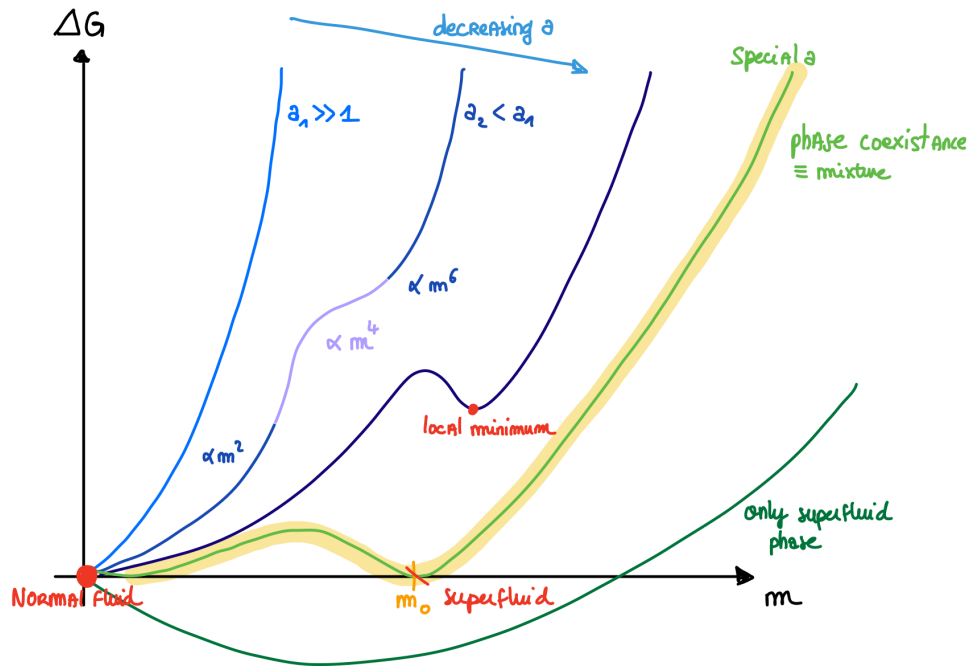


Ainsi on obtient une transition de phase continue pour $a = 0$,

$$k_B T_c = (1-x)zJ$$



- (d) On suppose que $c(T, \Delta) > 0$. Donnez qualitativement l'allure de $G(T, m, \Delta)$ lorsque $b(T, \Delta) < 0$. Que se passe-t-il dans ce cas là? Montrez que l'équation de la ligne de transition du premier ordre s'écrit $a = 3b^2/16c$.



Déterminons le a special,

$$\Delta G = \frac{c}{6} m^2 (m^2 - m_0^2)^2$$

et ceci est égal à 0 pour $m = 0$ ou $m = \pm m_0$.

On doit obtenir le même comportement que

$$\frac{am^2}{2} + \frac{bm^4}{4} + \frac{cm^6}{6}$$

via

$$\frac{cm^6}{6} - \frac{1}{3} cm_0^2 m^4 + \frac{c}{6} m_0^4 m^2$$

On obtient ainsi,

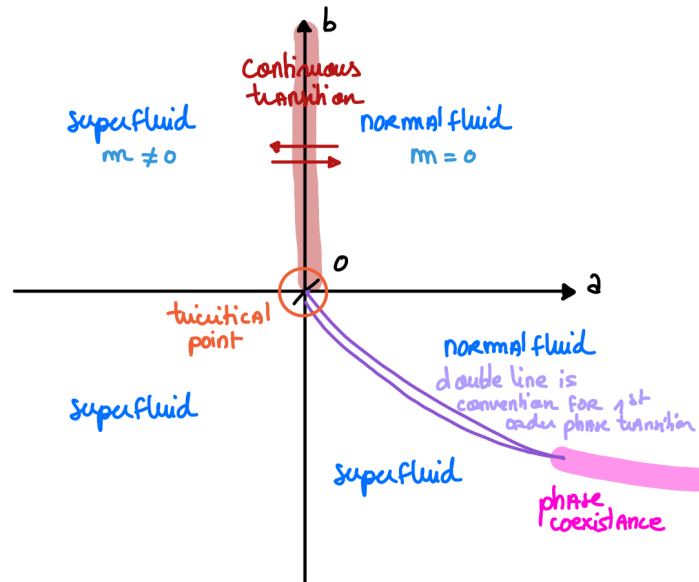
$$\begin{cases} -\frac{c}{3} m_0^2 = \frac{b}{4} \\ \frac{cm_0^4}{6} = \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow m_0 = \pm \sqrt{\frac{3b}{4c}}$$

Et on obtient,

$$\begin{aligned} a &= \frac{cm_0^4}{3} \\ &= \frac{c9b^2}{3 \times 16c^2} \\ &= \frac{3b^2}{16c} \end{aligned}$$

cela défini la condition pour la coexistence de phase.

(e) Montrez qu'il existe un point tricritique (T_t, x_t) dont on calculera les coordonnées.



$$b^2 = \frac{16ca}{3} \rightarrow b = -\sqrt{\frac{16ca}{3}}$$

Au point tricritique, $a = b = 0$,

$$\begin{cases} a = k_B T \delta - zJ = \frac{k_B T}{1-x} - zJ \\ b = \frac{k_B T}{8} \delta^2 \left(1 - \frac{\delta}{3}\right) \end{cases} = 0$$

Ce qui veut dire,

$$1 - \frac{\delta}{3} = 0 \rightarrow \delta = 3 \rightarrow x_t = \frac{2}{3}$$

Et alors,

$$k_B T_t = \frac{zJ}{3}$$